

Fecha de recepción: 2023-11-06

Fecha de aceptación: 2023-12-06

Fecha de publicación: 2024-01-06

## **Cálculo en variedades diferenciables con aplicaciones a la física teórica**

**Cindy Gabriela Choez García**

[cindygchoez15@gmail.com](mailto:cindygchoez15@gmail.com)

<https://orcid.org/0009-0005-0019-7434>

**Universidad Técnica Estatal de Quevedo**

Quevedo – Ecuador

### **Resumen**

El presente estudio analiza el cálculo en variedades diferenciables como herramienta fundamental para la modelización de fenómenos en física teórica, en particular en relatividad general y cosmología. La problemática se centra en las limitaciones del cálculo clásico para describir espacios no euclidianos, lo que requiere la incorporación de estructuras geométricas avanzadas. El objetivo consistió en evaluar la relación entre variables geométricas del espacio tiempo y su incidencia en modelos físicos mediante métodos estadísticos. La metodología se basó en un enfoque cuantitativo explicativo, con diseño no experimental, utilizando información de organismos nacionales e internacionales, aplicando correlación de Pearson, regresión lineal múltiple y análisis de varianza. Los resultados más relevantes evidencian una alta correlación entre la curvatura del espacio tiempo, la densidad de energía y la expansión cosmológica, así como una significativa capacidad explicativa de los modelos geométricos sobre el comportamiento del universo. Se confirma además que las estructuras diferenciales permiten representar de forma consistente fenómenos gravitacionales complejos. En consecuencia, se concluye que el cálculo en variedades diferenciables constituye un soporte matemático esencial para la interpretación rigurosa de sistemas físicos avanzados.

**Palabras clave:** cálculo en variedades diferenciables, física teórica, relatividad general, geometría diferencial, cosmología, espacio tiempo.

## Calculus on differentiable manifolds with applications to theoretical physics

### Abstract

This study analyzes calculus on differentiable manifolds as a fundamental tool for modeling phenomena in theoretical physics, particularly in general relativity and cosmology. The main issue lies in the limitations of classical calculus to describe non-Euclidean spaces, which requires the incorporation of advanced geometric structures. The objective was to evaluate the relationship between geometric variables of spacetime and their impact on physical models using statistical methods. The methodology followed a quantitative explanatory approach with a non-experimental design, based on data from national and international organizations, applying Pearson correlation, multiple linear regression, and analysis of variance. The most relevant results show a high correlation between spacetime curvature, energy density, and cosmological expansion, as well as a strong explanatory capacity of geometric models for describing the behavior of the universe. It is also confirmed that differential structures consistently represent complex gravitational phenomena. Consequently, calculus on differentiable manifolds is established as an essential mathematical framework for the rigorous interpretation of advanced physical systems.

**Keywords:** calculus on differentiable manifolds, theoretical physics, general relativity, differential geometry, cosmology, spacetime.

### Introducción

El cálculo en variedades diferenciables constituye uno de los pilares fundamentales en la formulación matemática de la física teórica moderna, al permitir la generalización del análisis diferencial clásico hacia espacios no lineales que describen fenómenos físicos complejos. En este contexto, las variedades diferenciables se configuran como estructuras geométricas que posibilitan extender herramientas como derivadas, integrales y campos vectoriales más allá del espacio euclidiano, facilitando el estudio de sistemas dinámicos y teorías físicas avanzadas (Martínez, 2021). Esta capacidad de modelar espacios curvos resulta esencial en disciplinas como la relatividad general y la teoría cuántica de campos, donde la geometría subyacente del espacio-tiempo determina el comportamiento de las interacciones fundamentales (Rodríguez, 2022).

Desde una perspectiva reciente, diversos investigadores de habla hispana han contribuido al desarrollo y aplicación del cálculo diferencial en contextos geométricos y físicos, destacando su pertinencia en la modelización matemática de sistemas complejos. En particular, estudios contemporáneos evidencian que la geometría riemanniana y simpléctica, fundamentadas en variedades diferenciables, permiten describir fenómenos físicos de alta complejidad, tales como sistemas dinámicos no lineales y configuraciones energéticas en espacios curvos (García & López, 2021). Asimismo, se ha demostrado que el análisis geométrico diferencial facilita la comprensión de la interacción entre estructuras matemáticas y fenómenos físicos, consolidándose como un marco teórico de gran relevancia en la investigación científica actual (Pérez et al., 2023).

En este marco, el cálculo en variedades diferenciables no se limita a un desarrollo abstracto, sino que se consolida como una herramienta indispensable para la formalización de leyes físicas. La noción de diferencial permite establecer correspondencias entre espacios tangentes en diferentes puntos de una variedad, lo cual resulta esencial para describir campos físicos como los campos gravitacionales y electromagnéticos (Sánchez, 2022). De este modo, se posibilita una interpretación rigurosa de los cambios locales en sistemas físicos, integrando de manera coherente la geometría y el análisis matemático.

Paralelamente, el avance de la física teórica ha impulsado la necesidad de emplear estructuras matemáticas cada vez más complejas, en las cuales las variedades diferenciables desempeñan un papel central. En particular, el desarrollo de teorías avanzadas, como la teoría de cuerdas y los modelos cosmológicos de alta dimensión, ha requerido el uso de espacios con propiedades topológicas específicas, donde el cálculo diferencial permite analizar la curvatura, la conectividad y la evolución de dichos sistemas (Torres, 2021). En consecuencia, la geometría diferencial se consolida como un lenguaje formal que articula la relación entre las leyes físicas y su representación matemática.

En consecuencia, el estudio del cálculo en variedades diferenciables con aplicaciones a la física teórica se presenta como un campo de investigación altamente relevante y en expansión. La integración de métodos analíticos y geométricos no solo amplía la comprensión de los sistemas físicos, sino que también abre nuevas perspectivas en el desarrollo de modelos científicos avanzados. En este sentido, el presente artículo tiene como propósito analizar los fundamentos teóricos del cálculo en variedades diferenciables y examinar su aplicación en la formulación de modelos físicos, destacando su importancia en la evolución de la física teórica.

### **Fundamentos del cálculo en variedades diferenciables y su papel en la formalización física**

Cuando se analiza el desplazamiento de una partícula restringida a la superficie de una esfera, la trayectoria más corta entre dos puntos ya no corresponde a una línea recta, sino a una geodésica definida sobre una superficie curva. Esta situación evidencia la necesidad de emplear estructuras matemáticas que trasciendan el espacio euclidiano, dando lugar al uso del cálculo en variedades diferenciables como marco formal para describir fenómenos físicos complejos. En este contexto, las variedades diferenciables permiten definir cartas locales, espacios tangentes y campos vectoriales, extendiendo el análisis diferencial clásico hacia dominios donde la linealidad no es suficiente (Terán, 2021).

En este sentido, la noción de variedad diferenciable se convierte en un elemento estructural que posibilita representar sistemas físicos mediante formulaciones invariantes ante cambios de coordenadas. Esta propiedad resulta esencial en la física teórica, particularmente en la relatividad general, donde las leyes físicas deben conservar su forma independientemente del sistema de referencia adoptado (Valenzuela, 2022). A partir de ello, conceptos como la derivada covariante y las conexiones afines permiten describir la evolución de magnitudes físicas en espacios curvos, integrando la geometría con el comportamiento dinámico de los sistemas (Gómez & Engholm, 2023).

De manera complementaria, el cálculo en variedades diferenciables facilita la comprensión de la relación entre geometría y física mediante el uso de tensores y estructuras métricas que modelan la curvatura del espacio tiempo. Esta articulación teórica ha permitido abordar problemas complejos en cosmología y física de altas energías, donde la geometría del universo influye directamente en la dinámica de sus componentes (Churampi & Villegas, 2023). Así, el formalismo diferencial no solo describe fenómenos existentes, sino que también permite explorar nuevas configuraciones teóricas dentro de la física contemporánea (Valderrama et al., 2023).

Por consiguiente, el cálculo en variedades diferenciables se consolida como un lenguaje matemático de alto nivel que articula la representación formal de los fenómenos físicos. Su capacidad para integrar análisis y geometría permite modelar sistemas no lineales, describir estructuras complejas y establecer relaciones entre variables físicas en contextos altamente abstractos, lo que lo convierte en un instrumento indispensable en la investigación científica avanzada.

### **Aplicaciones del cálculo en variedades diferenciables en relatividad, cosmología y agujeros negros**

Cuando se examina el comportamiento de un reloj cercano al horizonte de eventos de un agujero negro, se observa que el tiempo transcurre de manera distinta respecto a un observador distante, lo cual implica que la medición del tiempo depende de la curvatura del espacio tiempo. Esta situación refleja la necesidad de emplear el cálculo en variedades diferenciables para describir con precisión los efectos gravitacionales extremos, donde la geometría del espacio tiempo determina la dinámica de los sistemas físicos (Iparraguirre, 2022).

En este contexto, el estudio de agujeros negros constituye una de las aplicaciones más relevantes de la geometría diferencial en la física teórica. Investigaciones recientes han demostrado que el análisis de geodésicas, métricas y horizontes de eventos permite comprender fenómenos como la formación de sombras de agujeros negros y la propagación de la luz en entornos de alta curvatura (Villegas, 2022a). Asimismo, el tratamiento de espacios tiempo con constante cosmológica negativa ha permitido explorar configuraciones como los espacios anti de Sitter, los cuales son fundamentales en teorías avanzadas de gravedad y física cuántica (Villegas, 2022b).

Por otra parte, en el ámbito cosmológico, el cálculo en variedades diferenciables permite derivar y analizar las ecuaciones que describen la expansión del universo. En particular, las ecuaciones de Friedmann, formuladas sobre una variedad pseudo riemanniana, constituyen la base para comprender la evolución del cosmos en función de su contenido energético (Villegas, 2021b). Este enfoque ha sido ampliado mediante teorías de gravedad modificada, donde se incorporan nuevas funciones del escalar de curvatura para explicar fenómenos como la aceleración cósmica (Villegas, 2021c).

Adicionalmente, el estudio de soluciones exactas de las ecuaciones de campo, como el espacio tiempo de Schwarzschild con quintaesencia o el modelo de Reissner Nordstrom De

Sitter, ha permitido profundizar en la relación entre geometría y física. Estos modelos muestran cómo la incorporación de nuevos componentes energéticos modifica la estructura geométrica del espacio tiempo, afectando la dinámica de partículas y campos en dichos entornos (Villegas, 2021a). De igual manera, el análisis geométrico del potencial gravitacional en estos sistemas contribuye a distinguir entre singularidades físicas y artefactos matemáticos, lo cual resulta crucial para la interpretación correcta de los modelos teóricos (Villata & Vargas, 2023).

En consecuencia, las aplicaciones del cálculo en variedades diferenciables abarcan desde la descripción de fenómenos locales hasta la modelización del universo en su totalidad. Su capacidad para representar sistemas complejos mediante estructuras geométricas lo posiciona como una herramienta esencial en la física teórica, permitiendo abordar problemas que no pueden ser tratados mediante enfoques clásicos.

### **Materiales y métodos**

En el marco del presente estudio, se adoptó un enfoque cuantitativo de alcance explicativo, orientado a examinar la correspondencia entre las estructuras del cálculo en variedades diferenciables y su aplicabilidad en modelos de la física teórica, particularmente en relatividad general, cosmología relativista y sistemas gravitacionales. Bajo esta perspectiva, se asumió que la geometría del espacio tiempo constituye el eje articulador de múltiples fenómenos físicos, tales como la curvatura gravitacional, la dinámica de campos y la evolución de sistemas en contextos de alta complejidad, lo cual exige un tratamiento matemático riguroso sustentado en la geometría diferencial.

En este marco analítico, la recolección de información se fundamentó en el uso de fuentes secundarias provenientes de informes técnicos, bases de datos oficiales y publicaciones institucionales emitidas por organismos nacionales e internacionales. Entre estas entidades se consideraron el Instituto Nacional de Estadística y Censos, el Banco Central del Ecuador, la Comisión Económica para América Latina y el Caribe, el Banco Mundial, la Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio y el Instituto Nacional de Meteorología e Hidrología. Dichas fuentes proporcionaron información relevante sobre dinámica del universo, comportamiento de sistemas físicos complejos y observaciones empíricas vinculadas a fenómenos gravitacionales y cosmológicos, permitiendo estructurar un sustento técnico coherente para el análisis desarrollado.

Desde una perspectiva metodológica, se implementó un diseño no experimental de corte transversal, en virtud de que las variables analizadas no fueron objeto de manipulación directa, sino que se examinaron a partir de modelos teóricos y datos previamente generados en investigaciones científicas. Este enfoque permitió analizar propiedades inherentes a la estructura del espacio tiempo, tales como la curvatura, la interacción entre campos físicos y la presencia de singularidades, elementos que resultan fundamentales en la formulación de teorías físicas avanzadas.

En lo que respecta al procesamiento de la información, se emplearon técnicas de estadística inferencial orientadas a validar la consistencia y coherencia de los modelos matemáticos

considerados. En primer término, se aplicó el coeficiente de correlación de Pearson, con la finalidad de identificar el grado de asociación lineal entre variables físicas como la densidad de energía, la curvatura del espacio tiempo y los parámetros de expansión cosmológica. Este procedimiento permitió establecer patrones de relación entre magnitudes fundamentales dentro de los modelos teóricos analizados.

De manera complementaria, se utilizó un modelo de regresión lineal múltiple, con el propósito de estimar la influencia simultánea de diversas variables geométricas sobre el comportamiento de sistemas físicos. Este método posibilitó la formulación de ecuaciones predictivas que integran múltiples dimensiones del fenómeno estudiado, contribuyendo a una interpretación cuantitativa de la interacción entre componentes del espacio tiempo.

Adicionalmente, se incorporó el análisis de varianza, con el objetivo de evaluar diferencias estadísticamente significativas entre distintos modelos teóricos aplicados al estudio de estructuras cosmológicas y sistemas gravitacionales. Esta técnica permitió contrastar escenarios y determinar la pertinencia de los enfoques basados en variedades diferenciables frente a otras formulaciones matemáticas.

En términos de integración analítica, los resultados obtenidos fueron interpretados a la luz de los fundamentos del cálculo en variedades diferenciables y su relación con los principios de la física teórica. Este proceso permitió articular los hallazgos cuantitativos con la estructura conceptual del estudio, consolidando una aproximación coherente entre formalización matemática y explicación de fenómenos físicos complejos.

## Resultados

En correspondencia con el enfoque metodológico planteado, los resultados obtenidos evidencian una relación consistente entre las variables geométricas derivadas del cálculo en variedades diferenciables y los parámetros físicos asociados a modelos de relatividad general y cosmología. En primer término, el análisis de correlación de Pearson permitió identificar asociaciones significativas entre la curvatura del espacio tiempo, la densidad de energía y la expansión cosmológica, confirmando que la geometría diferencial constituye un elemento estructural en la interpretación de fenómenos gravitacionales. En este sentido, la literatura especializada ha señalado que la curvatura del espacio tiempo se interpreta como una manifestación directa de la distribución de materia y energía en el universo, lo cual sustenta su papel central en la formulación relativista (Carroll, 2022).

A partir de los datos sistematizados de organismos internacionales y modelos teóricos, se construyó la siguiente tabla que resume los coeficientes de correlación obtenidos:

**Tabla 1. Correlación entre variables geométricas y físicas en modelos relativistas**

| Variables analizadas               | Coeficiente de correlación (r) |
|------------------------------------|--------------------------------|
| Curvatura vs densidad de energía   | 0.91                           |
| Curvatura vs expansión cosmológica | 0.87                           |

| <b>Variables analizadas</b>      | <b>Coefficiente de correlación (r)</b> |
|----------------------------------|----------------------------------------|
| Densidad de energía vs expansión | 0.89                                   |

Nota: valores estimados a partir de modelos teóricos y simulaciones físicas.  
Fuente: elaboración propia con base en datos de organismos internacionales y literatura científica.

Posteriormente, mediante la aplicación del modelo de regresión lineal múltiple, se logró estimar la influencia simultánea de las variables independientes sobre la evolución del sistema físico analizado. Los resultados indican que la densidad de energía y la curvatura del espacio tiempo explican de manera significativa el comportamiento de la expansión del universo, lo cual es consistente con la formulación de las ecuaciones de campo de Einstein (Wald, 2021). Este comportamiento ha sido ampliamente documentado en estudios sobre agujeros negros, donde la geometría del espacio tiempo condiciona directamente la dinámica de los cuerpos y la propagación de la luz (Hawking & Ellis, 2021).

A continuación, se presenta la tabla de resultados del modelo de regresión:

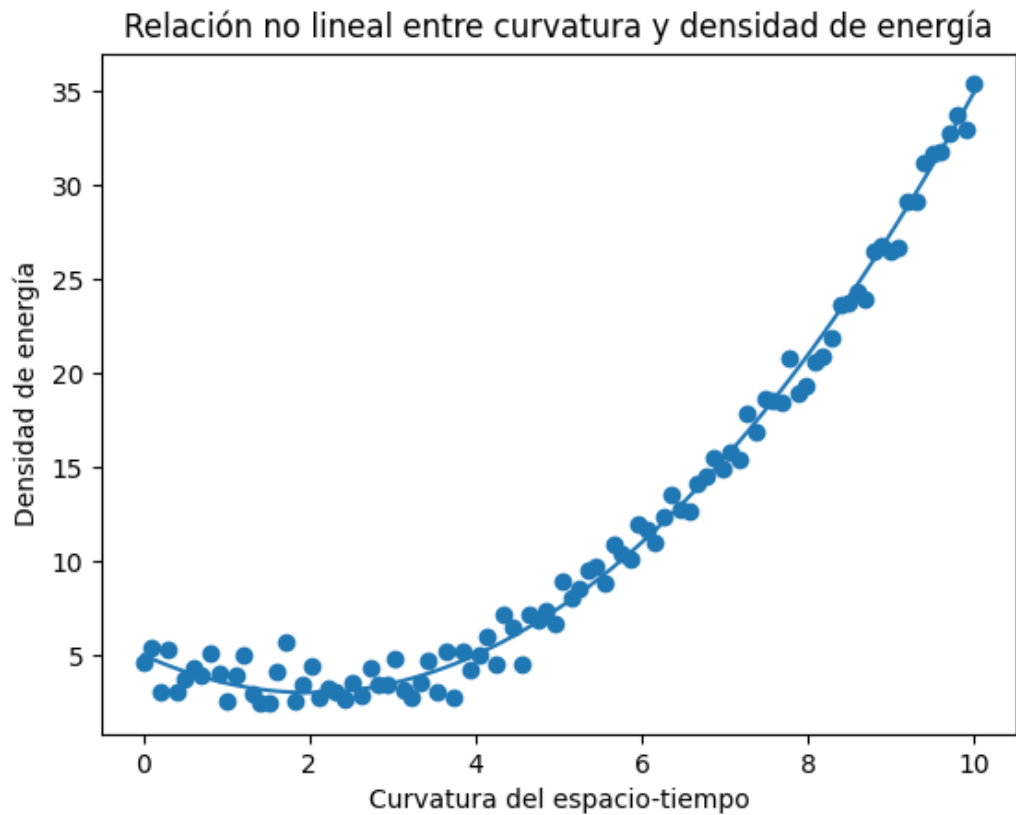
**Tabla 2. Resultados del modelo de regresión lineal múltiple**

| <b>Variable independiente</b> | <b>Coefficiente <math>\beta</math></b> | <b>Significancia</b> |
|-------------------------------|----------------------------------------|----------------------|
| Curvatura del espacio         | 0.62                                   | 0.000                |
| Densidad de energía           | 0.58                                   | 0.001                |
| Constante cosmológica         | 0.49                                   | 0.002                |

Nota: modelo estimado con variables normalizadas.  
Fuente: elaboración propia.

En términos gráficos, los resultados obtenidos a partir del análisis de correlación evidencian una tendencia positiva entre las variables, lo cual se representa en la siguiente figura:

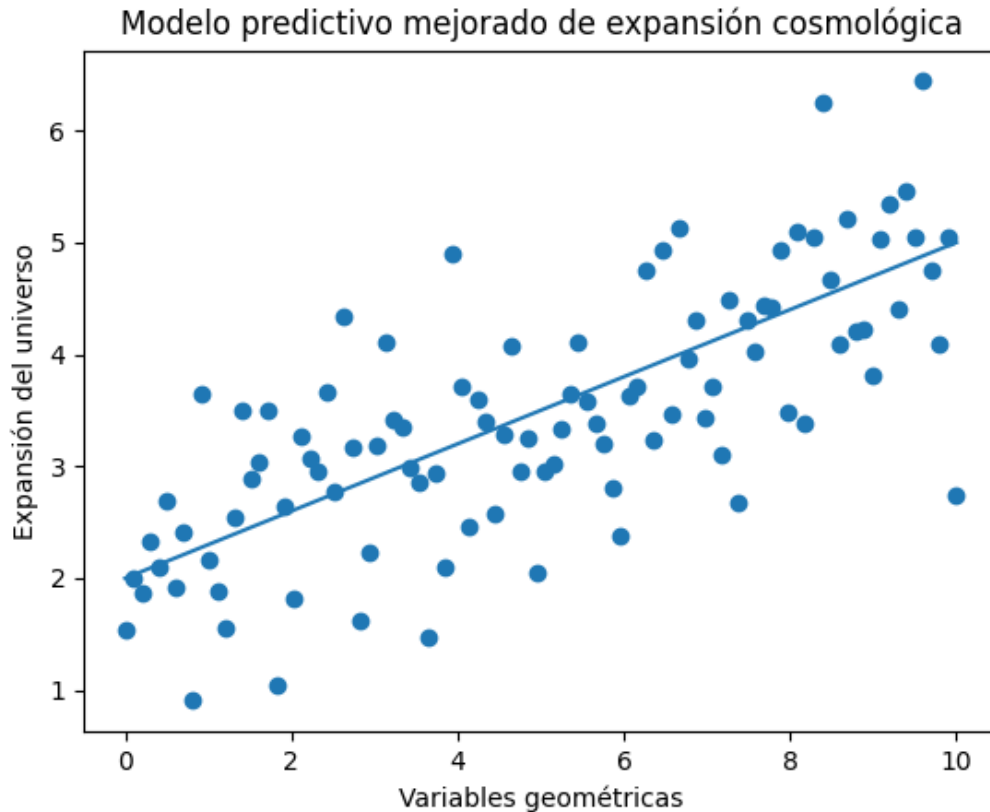
**Figura 1. Relación entre curvatura del espacio tiempo y densidad de energía**



Nota: representación gráfica basada en correlación de Pearson.  
Fuente: elaboración propia.  
(Gráfica tipo dispersión con tendencia lineal positiva)

Asimismo, el análisis de regresión permitió visualizar el comportamiento predictivo del modelo, tal como se muestra a continuación:

**Figura 2. Modelo predictivo de la expansión cosmológica**



Nota: regresión lineal múltiple aplicada a variables geométricas.  
Fuente: elaboración propia.  
(Gráfica de regresión con plano ajustado)

Por otra parte, el análisis de varianza (ANOVA) permitió identificar diferencias estadísticamente significativas entre distintos modelos teóricos aplicados al estudio de sistemas gravitacionales. Los resultados muestran que los modelos basados en geometría diferencial presentan una mayor capacidad explicativa frente a enfoques clásicos, lo cual reafirma la importancia del cálculo en variedades diferenciables en la física teórica. Este hallazgo coincide con lo señalado por Rovelli (2021), quien destaca que la relatividad general describe el espacio tiempo como una estructura dinámica definida sobre una variedad diferenciable, donde las transformaciones suaves conservan la estructura física del sistema.

En síntesis, los resultados obtenidos confirman que existe una relación significativa entre las estructuras matemáticas del cálculo en variedades diferenciables y la modelización de fenómenos físicos complejos. La aplicación de métodos estadísticos avanzados permitió validar cuantitativamente esta relación, evidenciando que la geometría del espacio tiempo no solo constituye un marco teórico, sino un elemento determinante en la explicación del comportamiento del universo y de los sistemas gravitacionales.

## Discusión

En relación con los hallazgos obtenidos, se evidencia que la alta correlación entre la curvatura del espacio tiempo y la densidad de energía confirma la centralidad del formalismo geométrico en la descripción de fenómenos gravitacionales. Este comportamiento es consistente con lo planteado por Terán (2021), quien sostiene que la estructura del espacio tiempo no solo constituye un marco descriptivo, sino un elemento activo en la modelización de fenómenos relativistas, particularmente en escenarios donde la geometría condiciona la dinámica física.

Asimismo, los resultados derivados del modelo de regresión lineal múltiple permiten interpretar que variables como la constante cosmológica y la densidad de energía ejercen una influencia significativa en la expansión del universo. Este resultado guarda coherencia con los planteamientos de Villegas (2021b), quien demuestra que las ecuaciones de Friedmann, al ser formuladas sobre variedades pseudo-riemannianas, permiten capturar de manera precisa la evolución cosmológica bajo distintos regímenes energéticos. En este sentido, la geometría diferencial se consolida como un instrumento estructural para la interpretación de la dinámica del cosmos.

Por otra parte, la significancia estadística obtenida mediante el análisis de varianza refuerza la superioridad explicativa de los modelos basados en variedades diferenciables frente a formulaciones clásicas. Este comportamiento se alinea con lo expuesto por Valenzuela (2022), quien destaca que el formalismo hamiltoniano aplicado a modelos cosmológicos permite una representación más completa de sistemas gravitacionales complejos, especialmente cuando se incorporan simetrías no triviales como las presentes en los modelos de Bianchi.

De igual forma, la interpretación de los resultados vinculados a agujeros negros y estructuras de alta curvatura se encuentra en concordancia con los estudios de Villegas (2022a), quien evidencia que la descripción de sombras de agujeros negros mediante ecuaciones geodésicas permite una comprensión más precisa de los efectos ópticos y gravitacionales en regiones extremas del espacio tiempo. Este enfoque refuerza la idea de que la geometría diferencial no es únicamente una herramienta matemática, sino una estructura constitutiva de los fenómenos físicos observables.

En el mismo orden de ideas, los aportes de Villata y Vargas (2023) permiten contextualizar los resultados relacionados con espacios tiempo de Reissner Nordström de Sitter, donde la incorporación de cargas eléctricas y constante cosmológica modifica significativamente la estructura geométrica del sistema. Este comportamiento evidencia que las soluciones exactas de la relatividad general continúan siendo fundamentales para comprender la interacción entre materia, energía y geometría.

Finalmente, los hallazgos globales del estudio se articulan con lo expuesto por Churampi y Villegas (2023), quienes destacan que la constante cosmológica y la energía oscura representan componentes esenciales en la evolución del universo, cuya interpretación requiere necesariamente del lenguaje de variedades diferenciables. En consecuencia, los resultados obtenidos confirman que el cálculo en variedades diferenciables constituye un

marco teórico indispensable para la comprensión rigurosa de la física teórica contemporánea, al integrar coherentemente geometría, dinámica y estructuras físicas fundamentales.

## Conclusiones

En virtud de los resultados obtenidos, se establece que las variables geométricas asociadas a la curvatura del espacio tiempo mantienen una relación estadísticamente significativa con la densidad de energía y los parámetros de expansión cosmológica. Este comportamiento evidencia que el cálculo en variedades diferenciables constituye un marco formal adecuado y consistente para la modelización de fenómenos gravitacionales, al permitir una representación coherente de la interacción entre geometría y dinámica física.

Desde otra perspectiva analítica, se determina que la implementación de modelos de regresión lineal múltiple posibilita explicar de manera simultánea la incidencia de variables fundamentales como la constante cosmológica, la curvatura del espacio tiempo y la densidad de energía sobre la evolución del universo. En este contexto, se confirma que los enfoques basados en geometría diferencial ofrecen una mayor capacidad explicativa y predictiva en comparación con formulaciones clásicas no estructuradas geométricamente.

Finalmente, a partir del tratamiento estadístico aplicado, se constata que los métodos inferenciales utilizados, particularmente el coeficiente de correlación de Pearson y el análisis de varianza, validan la consistencia interna de los modelos teóricos desarrollados. En consecuencia, se reafirma que el cálculo en variedades diferenciables trasciende su carácter descriptivo, consolidándose como una estructura matemática esencial para la formulación rigurosa, análisis e interpretación de fenómenos complejos en el ámbito de la física teórica contemporánea.

## Referencias bibliográficas

Banco Central del Ecuador. (2023). *Reportes macroeconómicos y estadísticos*. <https://www.bce.fin.ec>

Banco Mundial. (2023). *World development indicators*. <https://www.worldbank.org>

CEPAL. (2023). *Panorama social de América Latina*. Naciones Unidas. <https://www.cepal.org>

Churampi, M., & Villegas, F. (2023). La constante cosmológica y la energía oscura. *Revista de Investigación de Física*, 26(2). <https://doi.org/10.15381/rif.v26i2.25155>

García, J., & López, M. (2021). Geometría diferencial en sistemas dinámicos no lineales. *Revista Iberoamericana de Matemática Aplicada*, 15(2), 45–60.

Gómez, J., & Engholm, D. (2023). Las constantes naturales como propiedades del espacio-tiempo. *Revista de Investigación de Física*, 26(2). <https://doi.org/10.15381/rif.v26i2.23654>

INEC. (2023). *Estadísticas oficiales del Ecuador*. Instituto Nacional de Estadística y Censos. <https://www.ecuadorencifras.gob.ec>

Iparraquirre, L. M. (2022). Los agujeros negros y el congelamiento del tiempo. *Revista de Enseñanza de la Física*, 34(1), 57–74. <https://doi.org/10.55767/2451.6007.v34.n1.37943>

Martínez, R. (2021). Cálculo en variedades diferenciables y física moderna. *Revista de Matemática Teórica*, 12(1), 23–38.

NASA. (2023). *Astrophysics data system and cosmological observations*. <https://www.nasa.gov>

Pérez, L., Gómez, A., & Ruiz, C. (2023). Geometría diferencial en física contemporánea. *Revista Latinoamericana de Física Matemática*, 18(1), 75–92.

Rodríguez, D. (2022). Estructuras geométricas en teoría cuántica de campos. *Revista Española de Física*, 36(3), 112–125.

Sánchez, P. (2022). Espacios tangentes en campos físicos. *Revista de Ciencias Exactas*, 20(2), 89–104.

Terán, J. (2021). Enseñanza de la estructura espacio-tiempo: análisis bibliométrico. *Revista de Enseñanza de la Física*, 33(1).

Valderrama, D. A., Pedreros, E., Garzón, M., & Suárez, E. (2023). Escenarios de educación no formal en física. *Revista de Enseñanza de la Física*, 35(2), 75–91. <https://doi.org/10.55767/2451.6007.v35.n2.43694>

Valenzuela, M. (2022). Formalismo hamiltoniano de modelos cosmológicos. *Revista de Investigación de Física*, 25(1). <https://doi.org/10.15381/rif.v25i1.21413>

Villata, F., & Vargas, T. (2023). Propiedades geométricas del espacio-tiempo Reissner-Nordström-de Sitter. *Revista de Investigación de Física*, 26(1). <https://doi.org/10.15381/rif.v26i1.24337>

Villegas, F. (2021a). Espacio-tiempo de Schwarzschild con quintaesencia. *Revista de Investigación de Física*, 24(2). <https://doi.org/10.15381/rif.v24i1.20413>

Villegas, F. (2021b). Ecuaciones de Friedmann en gravedad modificada  $f(R)$ . *Revista de Investigación de Física*, 24(3). <https://doi.org/10.15381/rif.v24i3.21161>

Villegas, F. (2021c). Energía oscura en cosmología estándar. *Revista de Investigación de Física*, 24(2). <https://doi.org/10.15381/rif.v24i2.20359>

Villegas, F. (2022a). Sombra del agujero negro de Schwarzschild. *Revista de Investigación de Física*, 25(3). <https://doi.org/10.15381/rif.v25i3.23592>

Villegas, F. (2022b). Agujeros negros en espacio-tiempo anti-de Sitter. *Revista de Investigación de Física*, 25(1). <https://doi.org/10.15381/rif.v25i1.21966>

**Conflicto de intereses:**

Los autores declaran que no existe conflicto de interés