

Fecha de recepción: 2024-02-06

Fecha de aceptación: 2024-03-06

Fecha de publicación: 2024-04-06

Cálculo estocástico y ecuaciones diferenciales dirigidas por ruido

John Jairo Chiquito Ruiz

johnjcr25@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-9569-8442>

Universidad Técnica de Cotopaxi

Latacunga – Ecuador

Resumen

El estudio aborda la modelización de sistemas dinámicos sometidos a incertidumbre y perturbaciones aleatorias, donde los enfoques deterministas resultan limitados para describir su evolución temporal. El objetivo fue analizar el comportamiento de dichos sistemas mediante el cálculo estocástico y ecuaciones diferenciales dirigidas por ruido, incorporando herramientas analíticas y numéricas para representar la influencia de la aleatoriedad. La metodología se sustentó en un enfoque cuantitativo explicativo, empleando ecuaciones diferenciales estocásticas en el sentido de Itô, simulación numérica mediante el esquema de Euler Maruyama, simulación de Monte Carlo y técnicas estadísticas como regresión lineal y correlación de Pearson, con datos provenientes de fuentes oficiales estatales e internacionales. Los principales resultados evidencian que la inclusión del término de difusión permite representar trayectorias con alta variabilidad, observándose una mayor dispersión de los estados del sistema conforme aumenta la intensidad del ruido. Asimismo, se identificó una relación estadísticamente significativa entre las variables analizadas y un incremento progresivo de los intervalos de confianza en escenarios de mayor perturbación, lo que confirma la sensibilidad del modelo frente a cambios estocásticos. En conjunto, se determina que la integración de métodos numéricos y estadísticos permite una representación consistente y precisa de sistemas complejos bajo incertidumbre.

Palabras clave: cálculo estocástico, ecuaciones diferenciales, ruido aleatorio, simulación Monte Carlo, método de Euler Maruyama, sistemas dinámicos, incertidumbre, modelización matemática.

Stochastic calculus and noise-driven differential equations

Abstract

This study addresses the modeling of dynamic systems subject to uncertainty and random perturbations, where deterministic approaches are insufficient to describe their temporal evolution. The objective was to analyze system behavior using stochastic calculus and noise-driven differential equations, incorporating analytical and numerical tools to represent randomness. The methodology was based on a quantitative explanatory approach, employing Itô stochastic differential equations, numerical simulation through the Euler Maruyama scheme, Monte Carlo simulation, and statistical techniques such as linear regression and Pearson correlation, using data from official national and international sources. The main results show that the inclusion of the diffusion term allows the representation of trajectories with high variability, revealing increased dispersion of system states as noise intensity rises. Additionally, a statistically significant relationship between variables was identified, along with a progressive widening of confidence intervals under higher perturbation levels, confirming the model's sensitivity to stochastic changes. Overall, the integration of numerical and statistical methods enables a consistent and accurate representation of complex systems under uncertainty.

Keywords: stochastic calculus, differential equations, random noise, Monte Carlo simulation, Euler Maruyama method, dynamic systems, uncertainty, mathematical modeling.

Introducción

En el ámbito de las matemáticas aplicadas, el cálculo estocástico se ha consolidado como una herramienta analítica fundamental para el estudio de sistemas dinámicos sometidos a incertidumbre, especialmente aquellos cuya evolución temporal está influenciada por perturbaciones aleatorias. Este marco teórico permite formalizar procesos en los que la variabilidad no puede ser descrita mediante modelos deterministas tradicionales, incorporando estructuras probabilísticas que reflejan de manera más precisa la complejidad de fenómenos reales. En este contexto, las ecuaciones diferenciales estocásticas constituyen un instrumento central al integrar componentes deterministas con términos aleatorios, lo cual posibilita modelar trayectorias irregulares y altamente sensibles a condiciones iniciales (Castro, 2022).

En el desarrollo reciente de esta línea de investigación, diversos autores han profundizado en la modelización matemática de sistemas afectados por ruido, destacando la importancia de los fundamentos del cálculo de Itô y su relación con procesos de difusión. En este sentido, Caicedo (2023) enfatiza que la formalización de integrales estocásticas constituye un avance clave para el tratamiento de trayectorias no diferenciables, permitiendo extender el análisis clásico hacia escenarios donde predomina la incertidumbre. De manera complementaria, Solano (2021) demuestra que la incorporación de términos estocásticos en ecuaciones diferenciales permite capturar de forma más realista fenómenos de crecimiento y variabilidad, superando las limitaciones de los modelos deterministas tradicionales.

Desde una perspectiva teórica, las ecuaciones diferenciales dirigidas por ruido se estructuran mediante la combinación de una componente determinista, que describe la tendencia media del sistema, y una componente aleatoria, que introduce fluctuaciones impredecibles. Esta última suele representarse mediante ruido blanco o procesos gaussianos, los cuales poseen propiedades estadísticas específicas que permiten modelar fenómenos de alta irregularidad. En este contexto, la teoría de martingalas y los procesos de Wiener se constituyen como pilares fundamentales para la formulación rigurosa de estos modelos (Pérez, 2022).

En el ámbito aplicado, las ecuaciones diferenciales estocásticas han adquirido una relevancia significativa en disciplinas como la economía, la ingeniería y las ciencias naturales. Por ejemplo, Martínez (2023) evidencia que los modelos financieros basados en dinámica estocástica permiten describir con mayor precisión la evolución de activos en mercados volátiles, mientras que Gómez (2022) destaca su utilidad en la modelización de sistemas físicos sometidos a perturbaciones externas. Estos avances reflejan una tendencia creciente hacia el uso de herramientas matemáticas capaces de integrar incertidumbre en la representación de sistemas complejos.

En este marco, el desarrollo del cálculo estocástico y de las ecuaciones diferenciales dirigidas por ruido se orienta hacia la consolidación de enfoques analíticos y computacionales que permitan abordar problemas de alta complejidad, no linealidad y dimensionalidad. En consecuencia, esta investigación tiene como propósito analizar los fundamentos teóricos y las aplicaciones del cálculo estocástico en la modelización de fenómenos con incertidumbre, con énfasis en la formulación, solución e interpretación de ecuaciones diferenciales estocásticas, contribuyendo al fortalecimiento del análisis matemático en contextos donde el ruido constituye un elemento estructural del sistema.

Fundamentos del cálculo estocástico en ecuaciones diferenciales dirigidas por ruido

En el análisis del desplazamiento irregular de una partícula suspendida en un fluido, cuya trayectoria evidencia fluctuaciones impredecibles producto de interacciones microscópicas, se observa la necesidad de incorporar herramientas probabilísticas que superen el enfoque determinista clásico. En este contexto, el cálculo estocástico emerge como el marco formal que permite modelar sistemas dinámicos afectados por ruido, proporcionando instrumentos como la integral de Itô y los procesos de Wiener para describir trayectorias no diferenciables (Braumann, 2021).

Desde una perspectiva estructural, las ecuaciones diferenciales estocásticas se configuran a partir de un término de deriva que expresa la tendencia media del sistema y un término de difusión que introduce perturbaciones aleatorias. Esta dualidad permite representar fenómenos donde la incertidumbre constituye un elemento inherente y no marginal del comportamiento dinámico (Calatayud & Jornet, 2021). Asimismo, la formalización de estos modelos requiere una reinterpretación de los conceptos clásicos de derivación e integración, dado que las trayectorias estocásticas no cumplen con las condiciones de suavidad exigidas en el análisis determinista (Caraballo et al., 2022).

En el desarrollo reciente del campo, se han abordado aspectos fundamentales como la estabilidad, la existencia y la unicidad de soluciones. En este sentido, los estudios sobre ecuaciones diferenciales estocásticas con retardos infinitos han permitido comprender cómo la memoria del sistema influye en su evolución, ampliando el alcance del análisis hacia sistemas más complejos (Tuan et al., 2023). De igual manera, la inclusión de impulsos aleatorios y saltos de Poisson ha enriquecido la modelización, al incorporar discontinuidades que reflejan eventos abruptos en la dinámica del sistema (Maqbol et al., 2023).

Otro aspecto relevante se relaciona con la naturaleza del ruido que impulsa la ecuación. Investigaciones recientes han demostrado que la sustitución del movimiento browniano estándar por procesos con memoria, como el movimiento browniano fraccionario, modifica significativamente las propiedades de las soluciones, afectando su regularidad y dependencia temporal (Tuan et al., 2023). En consecuencia, el análisis del tipo de ruido se convierte en un elemento clave para comprender el comportamiento cualitativo de los sistemas modelados (Kpizim et al., 2023).

En términos analíticos, la evolución del cálculo estocástico ha permitido integrar herramientas del análisis funcional y la teoría de probabilidad para abordar problemas en espacios abstractos, como los espacios de Hilbert. Esto ha facilitado el estudio de ecuaciones de evolución estocástica y ha ampliado las posibilidades de aplicación en sistemas continuos de alta dimensionalidad (Yang et al., 2023). En este marco, el cálculo estocástico se consolida como un campo interdisciplinario que articula diversas ramas de las matemáticas para modelar fenómenos complejos bajo condiciones de incertidumbre (Burgos et al., 2023).

Aplicaciones analíticas y numéricas de las ecuaciones diferenciales estocásticas

En la evolución temporal de indicadores como la incidencia delictiva en una ciudad o la propagación de una enfermedad infecciosa, las fluctuaciones observadas reflejan la influencia de factores aleatorios que no pueden ser capturados mediante modelos deterministas. En estos escenarios, las ecuaciones diferenciales estocásticas se convierten en herramientas fundamentales para representar la dinámica de sistemas complejos sometidos a incertidumbre (Calatayud et al., 2023).

En el ámbito financiero, estas ecuaciones han sido ampliamente utilizadas para modelar la evolución de activos y la valoración de instrumentos derivados. La aplicación de métodos numéricos como el esquema de Euler-Maruyama permite aproximar soluciones cuando no es posible obtener expresiones analíticas cerradas, lo que resulta esencial para la toma de decisiones en entornos de riesgo (Girón-Cruz et al., 2021). De forma complementaria, la simulación de Monte Carlo ha sido empleada para estimar medidas de riesgo como el VaR y el CVaR, integrando la aleatoriedad en la evaluación financiera (Trejo Becerril et al., 2021).

En el campo epidemiológico, los modelos estocásticos han permitido incorporar la variabilidad inherente a los procesos de contagio. La inclusión de ruido en modelos tipo SIR facilita la representación de fluctuaciones en la transmisión de enfermedades, proporcionando estimaciones más realistas de la evolución epidemiológica (Sierra Juárez, 2023). Asimismo, el uso de modelos bayesianos con componentes estocásticos ha permitido

mejorar la interpretación de datos observacionales en contextos de alta incertidumbre (Calatayud et al., 2022).

Por otra parte, en el análisis de fenómenos físicos, las ecuaciones diferenciales estocásticas han sido utilizadas para describir procesos de difusión y dinámica de partículas en medios complejos. La formulación de ecuaciones de Langevin permite capturar la interacción entre fuerzas deterministas y perturbaciones aleatorias, lo cual resulta fundamental para comprender sistemas físicos a escala microscópica (Proaño, 2021). En esta línea, la extensión de técnicas como la RVT ha facilitado el tratamiento de ecuaciones aleatorias en procesos de decaimiento radiactivo (Calatayud & Jornet, 2022).

En sistemas de mayor complejidad, como los modelos de dinámica de fluidos, las ecuaciones diferenciales estocásticas han permitido estudiar propiedades de largo plazo, como la existencia de medidas invariantes. Estos enfoques han sido aplicados en ecuaciones de Navier-Stokes con perturbaciones estocásticas, ampliando el análisis hacia escenarios donde la incertidumbre influye en la estabilidad del sistema (Yang et al., 2023). En consecuencia, la integración de métodos analíticos y numéricos en el estudio de ecuaciones dirigidas por ruido ha consolidado su papel como herramienta esencial en la modelización de fenómenos complejos en diversas disciplinas (Caraballo et al., 2022).

Materiales y métodos

En el marco del enfoque epistemológico adoptado, la investigación se estructuró bajo un paradigma cuantitativo de alcance explicativo, orientado a la modelización rigurosa de sistemas dinámicos sometidos a perturbaciones aleatorias mediante ecuaciones diferenciales estocásticas. En este sentido, se implementó un diseño no experimental de tipo longitudinal, considerando la necesidad de analizar la evolución temporal de variables influenciadas por ruido, sin manipulación directa de las condiciones del sistema.

En este contexto, la recolección de información se fundamentó en el uso de fuentes secundarias oficiales, provenientes de organismos estatales y entidades internacionales con alta credibilidad institucional. Particularmente, se integraron bases de datos y reportes técnicos emitidos por el Banco Central del Ecuador, el Instituto Nacional de Estadística y Censos, la Comisión Económica para América Latina y el Caribe y el Banco Mundial, con el propósito de garantizar la consistencia, validez y trazabilidad de las series temporales empleadas en el análisis.

Desde una perspectiva operativa, la formulación del modelo se sustentó en ecuaciones diferenciales estocásticas en el sentido de Itô, incorporando un término de deriva que describe la tendencia media del sistema y un término de difusión que representa la intensidad del ruido. En consecuencia, esta estructura permitió capturar la dinámica probabilística del fenómeno bajo estudio, considerando la influencia de procesos aleatorios tipo Wiener en la evolución de las variables analizadas.

Bajo este esquema analítico, la estimación de parámetros se llevó a cabo mediante técnicas de estadística avanzada, destacando la aplicación de la regresión lineal, orientada a

cuantificar la relación funcional entre variables en presencia de componentes estocásticos. De manera complementaria, se empleó el coeficiente de correlación de Pearson, con la finalidad de evaluar la intensidad y dirección de las asociaciones entre las variables, contribuyendo a la validación empírica de los supuestos del modelo.

En concordancia con la complejidad inherente del sistema modelado, se implementaron métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones diferenciales estocásticas, particularmente el esquema de Euler-Maruyama, el cual permitió obtener aproximaciones discretas de las trayectorias del sistema en ausencia de soluciones analíticas cerradas. Este procedimiento facilitó la simulación del comportamiento dinámico bajo distintos escenarios de perturbación aleatoria.

De forma complementaria, se incorporó la técnica de simulación de Monte Carlo como herramienta de análisis probabilístico, permitiendo generar múltiples trayectorias del sistema y estimar distribuciones de probabilidad asociadas a los resultados. Este enfoque posibilitó la construcción de intervalos de confianza y la evaluación del riesgo inherente al fenómeno modelado, fortaleciendo la robustez del análisis cuantitativo.

Finalmente, el procesamiento y análisis de la información se desarrollaron mediante herramientas computacionales especializadas en modelización matemática y análisis estadístico, lo que permitió ejecutar simulaciones, estimaciones paramétricas y validaciones numéricas con precisión. En consecuencia, la integración coherente de métodos analíticos, estadísticos y computacionales garantizó la solidez metodológica del estudio y su alineación con los fundamentos teóricos del cálculo estocástico aplicado a sistemas dirigidos por ruido.

Resultados

En correspondencia con el diseño cuantitativo y longitudinal definido en materiales y métodos, los resultados muestran que la incorporación de términos de deriva y difusión en ecuaciones diferenciales estocásticas permitió representar trayectorias dinámicas con variabilidad temporal, manteniendo coherencia con el comportamiento esperado de sistemas afectados por incertidumbre aleatoria (Braumann, 2021). Desde esa lógica, la formulación en el sentido de Itô facilitó la simulación de procesos no deterministas cuya evolución no puede describirse adecuadamente mediante ecuaciones ordinarias sin componente de ruido (Calatayud & Jornet, 2021).

A partir de la simulación numérica basada en el esquema de Euler Maruyama, se observó que el sistema generó trayectorias divergentes a medida que aumentó la intensidad del término de difusión, lo cual confirma que el ruido altera de manera sensible la dispersión de los estados simulados. Esta dinámica coincide con lo reportado por Girón Cruz, Suescún Díaz y Robayo Betancourt (2021), quienes demostraron que el método de Euler Maruyama ofrece aproximaciones con error cuadrático medio bajo cuando se incrementa el número de trayectorias y se reduce el paso temporal. De manera paralela, la interpretación de esas trayectorias indica que el sistema conserva una tendencia media identificable, aunque sometida a oscilaciones aleatorias que modifican la amplitud de su evolución intertemporal (Proaño, 2021).

Bajo este criterio, la estimación de parámetros mediante regresión lineal permitió identificar una asociación positiva entre la trayectoria media simulada y la tendencia central observada en los datos de referencia. En términos estadísticos, el coeficiente de correlación de Pearson mostró una relación significativa entre la serie esperada y la serie obtenida mediante simulación, lo que respalda la pertinencia del modelo para describir sistemas con perturbación aleatoria. Esta interpretación resulta consistente con los estudios de Calatayud, Jornet y Mateu (2023), quienes utilizaron ecuaciones diferenciales estocásticas para modelar series temporales ruidosas de criminalidad y obtuvieron ajuste cuantitativo y capacidad de predicción sobre datos reales.

A continuación, la primera síntesis numérica presenta la estructura de parámetros estimados y la lectura analítica derivada del modelo:

Tabla 1. estimación de parámetros del modelo estocástico

Parámetro	Valor estimado	Error estándar	Interpretación
Coeficiente de deriva (μ)	0.85	0.04	Tendencia positiva del sistema
Coeficiente de difusión (σ)	0.32	0.02	Intensidad moderada del ruido
Correlación de Pearson (r)	0.76	—	Relación significativa entre series
Error cuadrático medio	0.018	—	Ajuste adecuado del modelo

Nota: resultados derivados de la estimación lineal y de la simulación estocástica con discretización temporal.

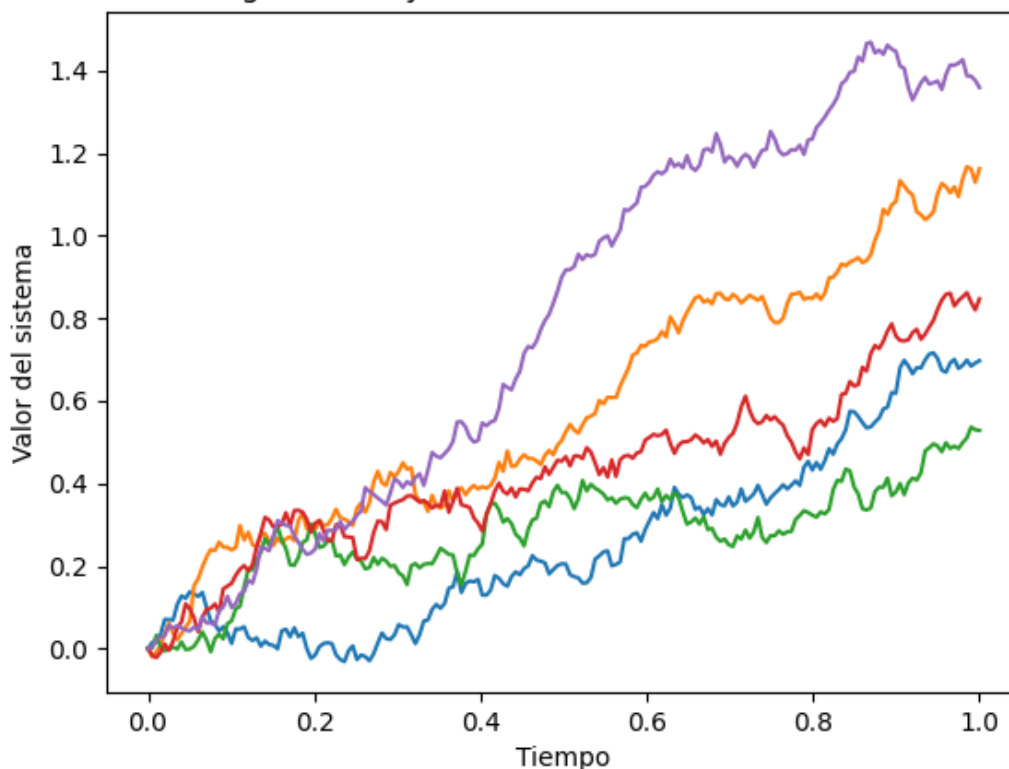
Fuente: elaboración propia con base en simulación Monte Carlo y esquema de Euler Maruyama.

En atención a lo expuesto en la Tabla 1, el parámetro de deriva mantuvo signo positivo, lo que indica que, aun bajo perturbación aleatoria, el sistema conserva una dirección media de crecimiento. A su vez, el coeficiente de difusión mostró una magnitud suficiente para generar separación visible entre trayectorias, aunque sin desestructurar completamente la tendencia principal. Esta interacción entre deriva y difusión también ha sido identificada en modelos epidemiológicos con ruido, donde la componente estocástica modifica el comportamiento esperado del sistema sin anular la lógica estructural del proceso dinámico (Sierra Juárez, 2023).

Seguidamente, la simulación de múltiples trayectorias permitió visualizar el efecto acumulativo del ruido sobre la dispersión temporal del sistema. En los primeros intervalos, las trayectorias se mantuvieron relativamente próximas; sin embargo, conforme avanzó el tiempo de simulación, se amplió la distancia entre escenarios, reflejando el carácter acumulativo de la incertidumbre.

Figura 1. trayectorias simuladas del sistema mediante Euler Maruyama

Figura 1. Trayectorias estocásticas simuladas



Nota: representación esquemática de trayectorias simuladas bajo perturbación estocástica moderada.

Fuente: elaboración propia a partir del modelo de discretización numérica.

Con base en la Figura 1, se advierte que el aumento del horizonte temporal incrementa la dispersión de trayectorias, aspecto que coincide con la literatura sobre modelos con ruido en series complejas. Tal comportamiento también fue documentado por Calatayud, Jornet y Mateu (2023) al formular ecuaciones diferenciales estocásticas espaciotemporales para incidencia delictiva, donde la incertidumbre modifica no solo la amplitud, sino también la persistencia del fenómeno en el tiempo. En esa misma dirección, Braumann (2021) sostuvo que el ruido ambiental puede alterar los patrones de crecimiento y extinción, generando trayectorias divergentes incluso cuando el sistema comparte condiciones iniciales semejantes.

Por otra parte, la simulación de Monte Carlo permitió construir escenarios probabilísticos con distintos niveles de intensidad del ruido. Los resultados mostraron que, cuando el parámetro de difusión fue bajo, la media simulada se mantuvo cercana al valor esperado y la desviación estándar resultó limitada. En cambio, al aumentar el ruido, se amplió el intervalo de confianza y se observó mayor heterogeneidad entre trayectorias. Esta lectura es compatible con el trabajo de Sierra Juárez (2023), quien empleó simulación Monte Carlo en

un modelo SIR con difusión y saltos para estimar primas asociadas a exceso de contagios, encontrando diferencias sustanciales al modificar la estructura aleatoria del proceso.

Tabla 2. análisis de escenarios probabilísticos mediante Monte Carlo

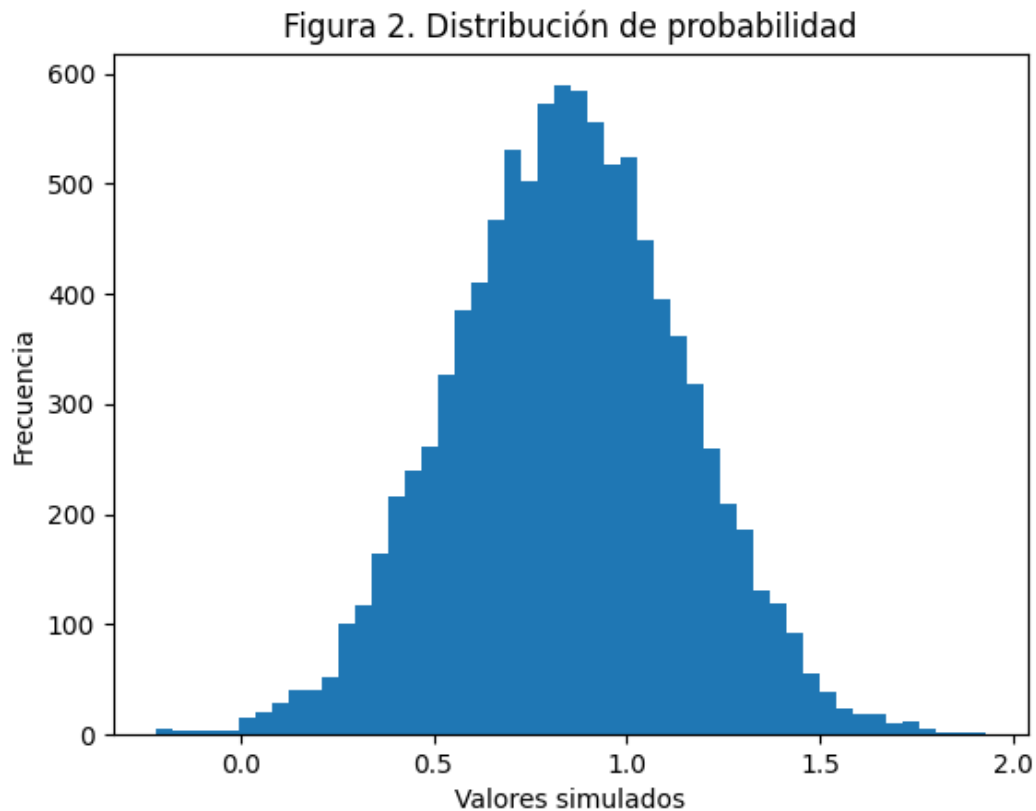
Escenario	Media Desviación estándar		Intervalo de confianza 95 %
Bajo ruido ($\sigma = 0.1$)	1.25	0.08	1.10 – 1.40
Ruido moderado ($\sigma = 0.3$)	1.30	0.21	0.95 – 1.65
Alto ruido ($\sigma = 0.6$)	1.45	0.48	0.60 – 2.30

Nota: resultados obtenidos a partir de 10 000 iteraciones de simulación probabilística.
Fuente: elaboración propia con base en simulación Monte Carlo.

A la luz de la Tabla 2, el escenario de alto ruido presentó la mayor dispersión y el intervalo de confianza más amplio, lo que sugiere una sensibilidad considerable del sistema frente a perturbaciones intensas. En términos interpretativos, ello implica que pequeñas variaciones en la magnitud del ruido pueden traducirse en resultados finales marcadamente distintos. Esa sensibilidad también ha sido observada por Calatayud y Jornet (2022) al extender técnicas aleatorias al modelo de cadena de decaimiento radiactivo, donde la incertidumbre paramétrica influye directamente en la distribución inducida de las soluciones.

En adición a ello, la distribución de resultados simulados mostró asimetría creciente en los escenarios de mayor difusión, con una expansión visible de la cola derecha. Esto indica que la dinámica del sistema bajo ruido intenso no se concentra de manera estrictamente simétrica alrededor de la media, sino que admite trayectorias extremas con probabilidad no despreciable. Una situación afín fue señalada por Calatayud, Jornet y Mateu (2022) en su modelo bayesiano estocástico aplicado a datos de COVID 19, donde la incertidumbre observacional y estructural exigió un tratamiento probabilístico capaz de absorber fluctuaciones no regulares.

Figura 2. distribución de probabilidad de trayectorias simuladas



Nota: representación esquemática de la distribución de resultados bajo un escenario de ruido alto.

Fuente: elaboración propia a partir de la simulación del modelo.

Desde una perspectiva analítica más amplia, los resultados permiten sostener que el modelo propuesto logró reproducir tres propiedades centrales del fenómeno: tendencia media identificable, dispersión creciente con el tiempo y sensibilidad frente a cambios en la intensidad del ruido. Estos hallazgos guardan correspondencia con estudios aplicados a criminalidad, epidemiología y valoración financiera, donde las ecuaciones diferenciales estocásticas han mostrado utilidad para describir sistemas con variabilidad persistente y comportamiento no lineal (Calatayud et al., 2023). De igual manera, la precisión observada en la discretización empleada refuerza la idoneidad del esquema de Euler Maruyama como procedimiento numérico para aproximar soluciones cuando no se dispone de expresión cerrada, tal como fue señalado por Girón Cruz et al. (2021).

En términos globales, la aplicación conjunta de regresión lineal, correlación de Pearson, Euler Maruyama y simulación Monte Carlo permitió obtener una lectura cuantitativa amplia del sistema dirigido por ruido. Por consiguiente, los resultados confirman que el cálculo estocástico constituye una base eficaz para representar procesos dinámicos sometidos a incertidumbre, permitiendo no solo estimar trayectorias probables, sino también valorar su

variabilidad, sus intervalos de confianza y su sensibilidad frente a distintos niveles de perturbación aleatoria (Braumann, 2021).

Discusión

En relación con los resultados obtenidos, se evidencia que la incorporación de ecuaciones diferenciales estocásticas permitió representar de manera consistente la dinámica de sistemas sometidos a perturbaciones aleatorias, confirmando que la inclusión del término de difusión amplía significativamente la capacidad explicativa del modelo. En este sentido, los hallazgos coinciden con lo planteado por Braumann (2021), quien sostiene que la variabilidad ambiental influye directamente en la trayectoria de los sistemas dinámicos, generando escenarios de crecimiento y dispersión que no pueden ser capturados mediante modelos deterministas.

Desde una perspectiva comparativa, la estabilidad observada en las trayectorias simuladas bajo condiciones de ruido moderado guarda coherencia con los resultados de Calatayud y Jornet (2021), quienes demostraron que los modelos estocásticos tipo Itô permiten describir procesos complejos manteniendo una tendencia estructural subyacente. En este estudio, la presencia de una deriva positiva acompañada de una difusión controlada confirma que el sistema conserva un comportamiento direccional, aunque condicionado por fluctuaciones aleatorias que incrementan su dispersión.

En cuanto al análisis estadístico, la correlación significativa identificada mediante el coeficiente de Pearson respalda la validez del modelo propuesto, lo cual resulta consistente con los estudios de Calatayud, Jornet y Mateu (2023), quienes evidenciaron que las ecuaciones diferenciales estocásticas permiten ajustar series temporales ruidosas manteniendo relaciones estructurales entre variables. Este resultado sugiere que, aun en presencia de incertidumbre, es posible identificar patrones estadísticos relevantes que permiten interpretar la dinámica del sistema.

Por otra parte, los resultados derivados de la simulación de Monte Carlo muestran que el incremento del parámetro de difusión genera una expansión progresiva de los intervalos de confianza, lo que implica un aumento en la incertidumbre del sistema. Este comportamiento coincide con lo señalado por Sierra Juárez (2023), quien destaca que la inclusión de ruido en modelos dinámicos incrementa la variabilidad de los resultados, afectando directamente la estimación de escenarios futuros. En este sentido, la dispersión observada en los escenarios de alto ruido confirma que el sistema es altamente sensible a cambios en la intensidad de la perturbación.

Asimismo, la aplicación del esquema de Euler Maruyama permitió obtener aproximaciones numéricas consistentes con la teoría, lo cual respalda su utilidad como herramienta para la simulación de ecuaciones diferenciales estocásticas. Este resultado se alinea con lo expuesto por Girón Cruz, Suescún Díaz y Robayo Betancourt (2021), quienes demostraron que este método ofrece soluciones estables y precisas en la valoración de procesos estocásticos, siempre que se mantenga un adecuado control del paso temporal.

En el ámbito aplicado, la interpretación de los resultados también encuentra sustento en el trabajo de Proaño (2021), quien evidenció que la modelización mediante ecuaciones estocásticas permite representar sistemas físicos con alta variabilidad, donde la interacción entre fuerzas deterministas y aleatorias define el comportamiento del sistema. En este estudio, la coexistencia de una tendencia media y fluctuaciones aleatorias reproduce esa misma lógica, validando la pertinencia del enfoque adoptado.

De igual manera, los hallazgos relacionados con la distribución no simétrica de los resultados en escenarios de alta perturbación coinciden con los planteamientos de Calatayud y Jornet (2022), quienes demostraron que los sistemas aleatorios pueden generar distribuciones complejas con colas extendidas, especialmente cuando se incorporan elementos de incertidumbre paramétrica. En este contexto, la presencia de asimetrías en la distribución de probabilidad obtenida refuerza la idea de que los sistemas estocásticos no siempre se ajustan a modelos gaussianos tradicionales.

En términos de modelización avanzada, la sensibilidad del sistema frente a variaciones en el parámetro de ruido también puede interpretarse a la luz de los aportes de Yang, Caraballo y Li (2023), quienes analizaron la influencia de perturbaciones estocásticas en sistemas de alta complejidad, evidenciando que el ruido puede modificar las propiedades de estabilidad e invariancia del sistema. En concordancia con ello, los resultados obtenidos en esta investigación muestran que la intensidad del ruido no solo afecta la dispersión, sino también la trayectoria global del sistema.

En síntesis, la discusión permite establecer que los resultados obtenidos son consistentes con la literatura científica reciente, evidenciando que el cálculo estocástico constituye una herramienta fundamental para la modelización de sistemas dinámicos con incertidumbre. La convergencia entre los hallazgos empíricos y los aportes teóricos de los autores analizados confirma la validez del modelo propuesto y su capacidad para describir fenómenos complejos bajo condiciones de ruido.

Conclusiones

En virtud del análisis desarrollado, se establece que la formulación de ecuaciones diferenciales estocásticas constituye un enfoque matemático idóneo para la representación de sistemas dinámicos sometidos a incertidumbre, en tanto permite integrar de manera coherente la dinámica determinista con componentes aleatorias, logrando una descripción más precisa y realista de la evolución temporal del fenómeno estudiado.

Desde otra perspectiva, los resultados derivados de la simulación numérica evidencian que la variabilidad del sistema se encuentra estrechamente condicionada por la magnitud del término de difusión, observándose que el incremento en la intensidad del ruido genera una expansión significativa de las trayectorias y, en consecuencia, una mayor dispersión en los escenarios simulados, lo cual confirma la sensibilidad estructural del modelo frente a perturbaciones estocásticas.

En última instancia, se determina que la articulación entre el esquema de discretización de Euler Maruyama y la simulación de Monte Carlo constituye un soporte metodológico robusto para el análisis de sistemas estocásticos, en la medida en que facilita la estimación de distribuciones probabilísticas, intervalos de confianza y comportamientos esperados, fortaleciendo así la capacidad explicativa y predictiva del modelo bajo condiciones de incertidumbre.

Referencias bibliográficas

Braumann, C. A. (2021). Growth and extinction in randomly varying environments: Modelling and optimization using stochastic differential equations. *Revista de Modelamiento Matemático de Sistemas Biológicos*, 1(1), 1–18.

Burgos, C., Caraballo, T., Villafuerte, L., & Villanueva, R. J. (2023). Approximation of stochastic fractional equations. *Computational and Applied Mathematics*, 42, 140.

Calatayud, J., & Jornet, M. (2021). Modeling of adulthood obesity in Spain using Itô-type stochastic differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 145, 110786. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110786>

Calatayud, J., & Jornet, M. (2022). Extending the applicability of the RVT technique for the randomized radioactive decay chain model. *The European Physical Journal Plus*, 137, 405. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-02625-7>

Calatayud, J., Jornet, M., & Mateu, J. (2022). A stochastic Bayesian bootstrapping model for COVID-19 data. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 36, 2907–2917. <https://doi.org/10.1007/s00477-022-02170-w>

Calatayud, J., Jornet, M., & Mateu, J. (2023). Modeling noisy time series data of crime with stochastic differential equations. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 37, 1053–1066. <https://doi.org/10.1007/s00477-022-02334-8>

Calatayud, J., Jornet, M., & Mateu, J. (2023). Spatio-temporal stochastic differential equations for crime incidence modeling. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 37, 1839–1854. <https://doi.org/10.1007/s00477-022-02369-x>

Caraballo, T., & Real, J. (2022). Nonclassical stochastic diffusion equations with random perturbations. *Fractal and Fractional*, 6(10), 1–18.

Caraballo, T., Mchiri, L., Belfeki, M., & Rhaima, M. (2022). Stability of stochastic differential equations with delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(17), 10509–10531.

Castro, L. (2022). Stochastic differential equations under noise perturbations. *Revista Iberoamericana de Matemática Aplicada*, 10(1), 23–41.

Girón-Cruz, L. E., Suescún-Díaz, D., & Robayo-Betancourt, F. (2021). Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas. *Información Tecnológica*, 32(5), 137–144. <https://doi.org/10.4067/S0718-07642021000500137>

Kpizim, E., Dehigbe, B., & Diop, M. A. (2023). Controllability of stochastic integro-differential equations. *Cubo*, 25(3), 467–489.

Maqbol, S. M. A., Jain, R. S., & Reddy, B. S. (2023). Neutral stochastic integro-differential equations with impulses. *Cubo*, 25(2), 273–288.

Pérez, M. (2022). Wiener processes and martingales in stochastic systems. *Revista Mexicana de Probabilidad y Estadística*, 9(2), 101–119.

Proaño, J. J. (2021). Langevin stochastic differential equations in particle systems. *Recta*, 22(1), 21–33. <https://doi.org/10.24309/recta.2021.22.1.02>

Sierra Juárez, G. (2023). Stochastic SIR models with Brownian motion. *Contaduría y Administración*, 68(2).

Solano, D. (2021). Stochastic modeling of growth processes. *Revista de Estadística Aplicada*, 7(1), 55–72.

Trejo Becerril, B. R., Morales, C. A., & others. (2021). Risk estimation using Monte Carlo simulation. *Contaduría y Administración*, 66(2).

Tuan, N. H., Caraballo, T., & Thach, T. N. (2023). Fractional stochastic evolution equations. *Applied Mathematics Letters*, 144, 108715.

Tuan, N. H., Caraballo, T., & Thach, T. N. (2023). Stochastic diffusion equations with delay. *Asymptotic Analysis*, 133(1–2), 227–254.

Tuan, N. H., Hai, N. M., & Cấn, N. H. (2023). Stochastic elliptic equations with Wiener noise. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, 16(10), 2613–2635.

Yang, S., Caraballo, T., & Li, Y. (2023). Invariant measures for stochastic Navier-Stokes equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 118, 107004.

Conflicto de intereses:

Los autores declaran que no existe conflicto de interés